ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN XUÂN VINH

VỀ ĐỊNH LÝ VAN DER WAERDEN, SỐ RAMSEY VÀ TẬP ĐƠN SẮC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN XUÂN VINH

VỀ ĐỊNH LÝ VAN DER WAERDEN, SỐ RAMSEY VÀ TẬP ĐƠN SẮC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TSKH. Hà Huy Khoái

THÁI NGUYÊN - 2018

Mục lục

Mở đầu **2**

1 Tổng quan về lý thuyết số tổ hợp **4**

1.1. Định lý Van der Waerden và Định lý Szemerédi 4

1.1.1. Định lý Van der Waerden 1927 4

1.1.2. Số Van der Waerden 8

1.1.3. Định lý Szemerédi 9

1.2. Hệ phủ đồng dư 10

1.2.1. Định nghĩa 10

1.2.2. Giả thuyết Selfridge và Schinzel và một số bài toán 13

2 Số Ramsey và tập đơn sắc **16**

2.1. Số Ramsey 16

2.1.1. Định nghĩa 16

2.1.2. Tính chất số Ramsey 17

2.1.3. Tiệm cận số Ramsey 18

2.1.4. Số Ramsey cho trường hợp tổng quát 22

2.2. Tập đơn sắc 27

2.2.1. Định nghĩa 27

2.2.2. Tập đơn sắc và các vấn đề liên quan 28

Kết luận **34**

Tài liệu tham khảo **35**

Mở đầu

Lý thuyết số tổ hợp là một trong những chủ đề được nhiều người quan tâm nghiên cứu trong lý thuyết số. Các kết quả của lý thuyết số tổ hợp có nhiều ứng dụng trong nghiên cứu các bộ môn khoa học khác cũng như ứng dụng vào trong các vấn đề thực tế. Ngoài ra, nhiều vấn đề của lý thuyết số tổ hợp còn được đề cập đến trong các đề thi học sinh giỏi toán.

Mục đích của luận văn là tìm hiểu và trình bày một số vấn đề của lý thuyết số tổ hợp. Cụ thể, luận văn trình bày về Định lý Van der Waerden về sự tồn tại một cấp số cộng đơn sắc trong một tập số tự nhiên liên tiếp được tô màu, về Định lý Szemerédi về mật độ cấp số cộng trong tập hợp các số tự nhiên liên tiếp, về khái niệm hệ phủ đồng dư và ứng dụng trong giải toán, về số Ramsey và tập đơn sắc trong bài toán tô màu.

Ngoài phần kết luận, mở đầu và tài liệu tham khảo nội dung chính của luận văn trình bày thành 2 chương:

Chương 1: Tổng quan về lý thuyết số tổ hợp. Mục đích của chương này là trình bày về Định lý Van der Waerden, Định lý Szemerédi, nêu ra một vài giá trị đã biết về số Van der Waerden và một số vấn đề liên quan tới hệ phủ đồng dư.

Chương 2: Số Ramsey và tập đơn sắc. Mục đích của chương này là trình bày khái niệm về số Ramsey và một số kết quả về số Ramsey, tập đơn sắc và một số vấn đề liên quan tới tập đơn sắc trong bài toán tô màu.

Luận văn được hoàn thành với sự hướng dẫn, chỉ bảo tận tình của GS.TSKH. Hà Huy Khoái và sự đóng góp ý kiến sát sao của các thầy, cô trường Đại học Khoa học - Đại học Thái nguyên. Qua luận văn này em xin được bày tỏ lòng biết ơn đến sự hướng dẫn tận tình của thầy hướng dẫn và các thầy, cô trường Đại học Khoa học - Đại học thái nguyên đã góp ý sâu sắc, tạo điều kiện thuận lợi để em hoàn thành luận văn nay.

Tôn xin trân trọng cám ơn đến Sở Giáo dục và Đào tạo Bắc Ninh, tập thể sư phạm trường THPT Lý Thường Kiệt đã tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học.

Chương 1

Tổng quan về lý thuyết số tổ hợp

Trong Chương 1, luận văn trình bày hai định lý, gồm Định lý Van der Waerden và Định lý Szemerédi, một vài giá trị đã biết về số Van der Waerden và các khái niệm cơ bản về hệ phủ đồng dư. Tài liệu tham khảo chính của chương này là các tài liệu [1], [4].

1.1. Định lý Van der Waerden và Định lý Szemerédi

Định lý Van der Waerden và Định lý Szemerédi là hai định lý quan trọng trong lý thuyết số nghiên cứu về cấp số cộng và mật độ của cấp số, đồng thời hai định lý này cũng là tiền đề để tìm hiểu và phát triển các kết quả mới về cấp số cộng.

Nhắc lại rằng cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai trở đi, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số d không đổi. Ta có thể biểu diễn cấp số cộng dưới dạng như sau: $a, a+d, a+2d, \ldots, a+(m-1)d, ...$, trong đó: m là số nguyên dương bất kỳ, $a, d \in \mathbb{R}, a$ được gọi là số hạng đầu tiên và d gọi là công sai của cấp số cộng.

Với mọi n là số tự nhiên, ta kí hiệu $[n] = \{1, 2, \ldots., n\}$ là tập hợp các số tự nhiên từ 1 đến n.

Cho một tập hợp X và $t \in \mathbb{N}$, khi đó $X_{(t)} = \{A \subset X, |A| = t\}$, tức là $X_{(t)}$ là tập hợp gồm các tập con của X có lực lượng t.

1.1.1. Định lý Van der Waerden 1927

Định lý Van der Waerden phát biểu rằng: Với hai số nguyên dương m, k cho trước tồn tại một số nguyên $N = N(m, k)$ sao cho với mọi

$n \geq N$ nếu $[n]$ được tô bởi k màu thì luôn tồn tại một cấp số cộng đơn sắc độ dài m trong $[n]$.

Giả sử Định lý Van der Waerden được chứng minh. Do tập $[n]$ được tô bởi k màu nên ta có thể chia tập $[n]$ thành k tập con được xác định bởi k màu riêng biệt. Theo Định lý Van der Waerden thì khi đó sẽ tồn tại một tập con trong k tập con trên mà trong đó tồn tại một cấp số cộng độ dài m.

Ta có thể phát biểu lại Định lý Van der Waerden dưới dạng sau:

Định lý 1.1 *Đối với mọi cặp số tự nhiên k, l luôn tồn tại số tự nhiên $n(k, l)$ sao cho nếu một đoạn bất kỳ của dãy số tự nhiên có độ dài $n(k, l)$ được phân hoạch theo cách tuỳ ý thành k lớp, thì sẽ có ít nhất một lớp trong k lớp đó chứa một cấp số cộng độ dài l.*

Để chứng minh Định lý Van der Waerden, ta sẽ chứng minh một định lý tổng quát hơn:

Định lý 1.2 *Cho trước dãy vô hạn số tự nhiên:*

$$t_1, t_2, ..., t_q, ... \tag{1.1}$$

Đối với mỗi cặp số tự nhiên k, l luôn tồn tại một số tự nhiên $n(k, l)$ sao cho nếu một đoạn bất kỳ của dãy số tự nhiên có dộ dài $n(k, l)$ được phân hoạch theo cách tuỳ ý thành k lớp, thì sẽ có ít nhất một lớp mà trong đó tồn tại dãy số $c_1, c_2, ..., c_l$ thỏa mãn diều kiện sau:

$$(c_2 - c_1) : (c_3 - c_2) : ... : (c_l - c_{l-1}) = t_1 : t_2 : ... : t_{l-1}.$$

Nói một cách ngắn gọn, l số đó lập nên một cấp số cộng tổng quát độ dài l được tạo ra bởi dãy số (1.1). Định lý Van der Waerden là trường hợp riêng của Định lý 1.2 trong trường hợp $t_1 = t_2 = \cdots = t_q = \cdots = 1$.

Chứng minh Định lý 1.2.

Đặt số hạng đầu tiên của dãy (1.1) bằng đơn vị: t_1. Dễ thấy rằng Định lý 1.2 là hiển nhiên với $l = 2$ và với mọi k (bởi vì số $n(k, l)$ có thể nhận giá trị $k + 1$), tức là tồn tại một cấp số cộng trong dãy có độ dài là 2, điều này luôn đúng. Giả sử định lý đúng với mọi số $l \geq 2$ và k bất kỳ.

Đặt:

$$q_0 = 1, n_0 = n(k, l), q_s = (1 + t_1)n_{s-1}q_{s-1}, n_s = n(k^{q_s}, l) > 0. \tag{1.2}$$

Ta sẽ chứng minh định lý đúng với $l+1$, tức là số $n(k, l+1)$ có thể lấy bằng q_k. Giả sử đoạn $\triangle$ của dãy số tự nhiện có độ dài q_k được phân hoạch thành k lớp. Hai số a và b của đoạn $\triangle$ được gọi là cùng loại nếu chúng cùng nằm trong một lớp và được viết là $a \sim b$. Hai đoạn $\triangle'(a, a+1, ..., a+r)$ và $\triangle''(a, a'+1, ..., a'+r)$ có độ dài bằng nhau và cùng nằm trong đoạn $\triangle$ sẽ được gọi là cùng loại và được viết $\triangle' \sim \triangle''$, nếu $a+j \sim a'+j, j = 0, 1, ..., r$. Rõ ràng đối với các đoạn có độ dài m, thì số các loại khác nhau có thể sẽ bằng k^m.

Vì $q_k = (1+t_l)n_{k-1}q_{k-1}$ nên đoạn $\triangle$ có thể được xem như gồm hai phần không bằng nhau: Phần bên trái là một dãy gồm n_{k-1} đoạn có độ dài q_{k-1}, còn phần bên phải là một dãy gồm $t_l n_{k-1}$ đoạn có độ dài q_{k-1}. Ta sẽ nói rằng các đoạn có độ dài bằng nhau tạo nên một cấp số cộng tổng quát nếu cấp số đó được lập nên bởi các số đầu tiên của chúng. Do định nghĩa của số n_{k-1} nên ta có thể khẳng định được rằng: Phần bên trái của đoạn $\triangle$ chứa một cấp số cộng tổng quát từ l đoạn cùng loại với nhau $\triangle_1, \triangle_2, ..., \triangle_l$ và cùng có độ dài là q_{k-1}. Ký hiệu các khoảng cách giữa các đầu mút bên trái của hai đoạn kề nhau (tức là hiệu giữa hai số đầu tiên của hai đoạn kề nhau) là: $d_1, d_1t_2, ..., d_1t_{l-1}$.

Đối với cấp số cộng tổng quát, từ các đoạn cùng loại đó ta gắn thêm vào nó phần tử thứ $l+1$ là $\triangle_{l+1}$, phần tử ấy có thể không cùng loại với các phần tử đứng trước và nó có thể vượt quá phần tử đầu tiên của đoạn $\triangle$, nhưng vẫn nằm trong đoạn $\triangle$.

Bây giờ ta lấy một phần tử $\triangle_{i_1}$ bất kỳ từ l phần tử của cấp số cộng tổng quát, đó là đoạn có độ dài q_{k-1}. Ta sẽ tiến hành trên đoạn đó tương tự như đã tiến hành với đoạn $\triangle$ (tức là coi đoạn $\triangle$ như là dãy $(1+t_l)n_{k-1}$ đoạn có độ dài q_{k-1}). Do định nghĩa của số n_{k-1}, ta có thể khẳng định rằng, phần bên trái của đoạn $\triangle_{i_1}$ bao gồm n_{k-1} đoạn có độ dài q_{k-2} chứa cấp số cộng tổng quát từ l đoạn cùng loại $\triangle_{i_2 i_2} (1 \le i_2 \le l)$ có cùng độ dài q_{k-1}. Ta ký hiệu các khoảng cách giữa các đầu mút trái của hai đoạn kề nhau $\triangle_{i_2 i_2}$ là: $d_2, d_2t_2, ..., d_2t_{l-1}$.

Một lần nữa, ta lại nối thêm vào cấp số cộng tổng quát này phần tử thứ $l+1$ và rõ ràng phần tử ấy cũng vẫn nằm trong đoạn $\triangle_{i_1}$. Việc xây dựng như vậy được tiến hành với tất cả các đoạn $\triangle_{i_1} (1 \le i_1 \le l+1)$ và trong tất cả các đoạn đó ta sẽ lấy các đoạn $\triangle_{i_2 i_2} (1 \le i_2 \le l+1)$ theo vị trí tương ứng. Bởi vì tất cả là cùng loại nên rõ ràng mọi $\triangle_{i_2 i_2}$ sẽ là cùng loại, nếu $1 \le i_1 \le l, 1 \le i_2 \le l$.

Quá trình xây dựng được tiếp tục k lần. Kết quả sau lần cuối cùng ta

sẽ nhận được các đoạn có độ dài $q_0 = 1$, tức là một đoạn đơn giản $\triangle$ mà một cách tổng quát ta có thể ký hiệu là $\triangle_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ $(1 \leq i_1, i_2, ..., i_k \leq l+1)$.

Như vậy ta dễ thấy rằng, với $1 \leq s \leq k, 1 \leq i_r \leq l, 1 \leq i'_r \leq l (1 \leq r \leq s)$ thì

$$\triangle_{i_1 i_2 \ldots i_s} \sim \triangle_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s}. \tag{1.3}$$

Hai nhận xét sau đây là rất quan trọng đối với phần còn lại trong chứng minh định lý.

1) Giả sử: $1 \leq s \leq k, 1 \leq i_r \leq l, 1 \leq i'_r \leq l (1 \leq r \leq s), 1 \leq i_m \leq l+1$ $(s+1 \leq m \leq k)$. Khi đó

$$\triangle_{i_1 i_2 \ldots i_s i_{s+1} \ldots i_k} \sim \triangle_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s i'_{s+1} \ldots i_k}. \tag{1.4}$$

Thật vậy, do hai số đó đứng ở các vị trí giống nhau trong các đoạn cùng loại $\triangle_{i_1 i_2 \ldots i_s}$ và $\triangle_{i'_1 i'_2 \ldots i'_s}$.

2) Với số $s \leq k, i_s \leq l, i'_s = i_s + 1$, các đoạn $\triangle_{i_1 \ldots i_{s-1} i_s}$ và $\triangle_{i_1 \ldots i_{s-1} i'_s}$ là các đoạn kề nhau ở bước xây dựng thứ s của chúng ta, nên đối với mọi chỉ số $i_{s+1}, ...i_k$, các số $\triangle_{i_1 i_{2 \ldots s-1} i_s i_{s+1} \ldots i_k}$ và $\triangle_{i_1 i_{2 \ldots s-1} i'_s i_{s+1} \ldots i_k}$ sẽ chiếm các vị trí giống nhau trong hai đoạn kề nhau, sao cho:

$$\triangle_{i_1 i_{2 \ldots s-1} i'_s i_{s+1} \ldots i_k} - \triangle_{i_1 i_{2 \ldots s-1} i_s i_{s+1} \ldots i_k} = d_s t_{i_s}. \tag{1.5}$$

Để ngắn gọn, ta đặt $l' = l + 1$. Xét $k + l$ số

$$a_r = \triangle_{\underbrace{1 \cdots 1}_{r} \underbrace{l' \cdots l'}_{k-r}}, r = 0, 1, ..., k. \tag{1.6}$$

Trong các số đó, ta luôn tìm được hai số a_r và a_s cùng nằm trong một lớp

$$\triangle_{\underbrace{1 \cdots 1}_{r} \underbrace{l' \cdots l'}_{k-r}} \sim \triangle_{\underbrace{1 \cdots 1}_{s} \underbrace{l' \cdots l'}_{k-s}}. \tag{1.7}$$

Xét các số

$$a_r = \triangle_{\underbrace{1 \cdots 1}_{r} \underbrace{i \cdots i}_{s-r} \underbrace{l' \cdots l'}_{k-s}} (1 \leq i \leq l'). \tag{1.8}$$

Ta sẽ chứng minh rằng chúng cùng nằm trong một lớp, và tạo thành một cấp số cộng tổng quát.

Thật vậy, các số $c_{l'}$ và c_1 cùng loại do (1.7), còn tất cả các $c_i (i < l')$ là cùng loại do (1.4). Vì vậy tất cả các số $c_i (1 \leq i \leq l')$ cùng nằm trong một lớp. Phần còn lại, ta cần phải chỉ ra rằng các số đó lập thành một cấp số cộng, tức là:

$$(c_2 - c_1) : (c_3 - c_2) : \cdots : (c_{l'} - c_l) = 1 : t_2 : \cdots : t_{l'}. \tag{1.9}$$

Để ngắn gọn, ta đặt $i' = i + 1$. Ta đưa vào xét các số sau:

$$c_{i,m} = \triangle_{\underbrace{1\cdots1}_{s}\underbrace{i'\cdots i'}_{m}\underbrace{i\cdots i}_{s-r-m}\underbrace{l'\cdots l'}_{k-s}}(0 \le m \le s-r).$$

Khi đó $c_{i+1} - c_i = \sum\limits_{m=1}^{s-r}(c_{i,m} - c_{i,m-1})$ bởi vì $c_{i,0} = c_i$ và $c_{i,s-r} = c_{i+1}$. Nhưng do (1.5) ta có
$c_{i,m} - c_{i,m-1} = \triangle_{\underbrace{1\cdots1}_{r}\underbrace{i'\cdots i'}_{m}\underbrace{i\cdots i}_{s-r-m}\underbrace{l'\cdots l'}_{k-s}} - \triangle_{\underbrace{1\cdots1}_{r}\underbrace{i'\cdots i'}_{m-1}\underbrace{i\cdots i}_{s-r-m+1}\underbrace{l'\cdots l'}_{k-s}} =$
$d_{r+m}t_i$, có nghĩa là: $c_{i+1} - c_i = \sum\limits_{m=1}^{s-r} d_{r+m}t_i$.

Nhưng do $\sum\limits_{m=1}^{s-r} d_{r+m}$ không phụ thuộc vào i, và do đó điều kiện (1.9) được thỏa mãn. Do đó định lý được chứng minh với giả thiết rằng, phần tử đầu tiên của dãy số (1.1) bằng đơn vị (tức là bằng 1). Nếu t_1 khác đơn vị, thì ta xét dãy số sau đây:

$$1, t_1, \cdots, t_q, \cdots. \tag{1.10}$$

Khi đó $l + 1$ số $c_i (i = 1, 2, \cdots, l + 1)$ lập thành một cấp số cộng tổng quát độ dài $l+1$, được tạo ra bởi dãy số (1.10) cùng nằm trong một lớp, vì thế đương nhiên nó chứa l số lập thành cấp số cộng tổng quát độ dài l, được tạo ra bởi dãy số (1.1) và cùng nằm trong một lớp. Do đó định lý được chứng minh.

1.1.2. Số Van der Waerden

Định nghĩa 1.1 Số tự nhiên nhỏ nhất $N = N(m, k)$ thỏa mãn Định lý Van der Waerden được gọi là số Van der Waerden, và kí hiệu là $w(m, k)$.

Một số giá trị chính xác của $w(m, k)$ đã được chỉ ra. Ta có $w(m, 1) = m$ và $w(2, k) = k + 1$. Với các giá trị khác của k và m, chúng ta đã biết $w(3, 2) = 9$, $w(4, 2) = 35$, $w(5, 2) = 178$, $w(6, 2) = 1132$, $w(3, 3) = 27$ và $w(4, 3) = 76$.

Sau đây ta kiểm tra lại, chẳng hạn hai kết quả $w(m, 1) = m$ và $w(2, k) = k + 1$.

Thật vậy:

+) $w(m, 1) = m$, khi đó tất cả các phần tử của $[n]$ được tô bằng 1 màu. Như vậy, nếu đặt $N = m$ thì với mọi $n \ge N$, trong $[n]$ tồn tại cấp